TECHNIQUES & MÉTHODES S10

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis!

▪▪▪ Monotonie d'une suite de nombres réels

Pour tester si une suite u est monotone, plusieurs méthodes sont utiles :

- pour tout $n \in \mathbf{N}$, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. C'est la méthode standard, ce qui ne signifie pas que c'est la plus simple à mettre en œuvre! Elle est particulièrement adaptée lorsque u_n est définie à l'aide d'une somme par exemple.
- si u est inversible et de signe constant (strictement positive ou strictement négative), je peux comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. Ensuite, en multipliant les deux membres par u_n (attention au cas où $u_n < 0$) j'en déduis l'ordre de u_n et u_{n+1}.
- si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = f(n)$, où $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, je peux directement étudier la fonction f sur $\mathbf{R}^+$.

▪▪▪ Estimations d'une suite

Montrer qu'une suite est majorée (ou minorée, ou bornée) revient à montrer l'existence d'un réel M tel que $\forall n \in N,\ u_n \leq M$. En pratique, pour déterminer le réel M, j'utilise souvent la transitivité de l'ordre.
Soit $n \in \mathbf{N}$, on procède par majorations successives, jusqu'à l'obtention d'un majorant universel (indépendant de n)

$$\begin{aligned} u_n &\leq \textit{une première majoration} \\ &\leq \textit{une deuxième majoration plus large} \\ &\ \ \vdots \\ &\leq M \textit{un majorant indépendant de } n \end{aligned}$$

Exercice 22 : $u = (n^2 - 2n)_n$ est-elle majorée, minorée? *Réponse*u est minorée par -1 et non majorée

Lorsque je connais le comportement asymptotique de la suite, je peux aussi en déduire facilement des estimations de la suite.

- si la suite converge, alors elle est bornée;
- si la suite diverge vers $-\infty$, alors elle est majorée;
- par le théorème **limites et inégalités** : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$, alors à partir d'un certain rang n_0, on a aussi $u_n > m$, etc.

▪▪▪ Convergence et divergence

Étudier le comportement d'une suite c'est savoir si elle converge, si elle diverge vers $\pm\infty$, ou si elle diverge sauvagement.

Démontrer qu'une suite (u_n) est convergente se fait en deux étapes :

$\boxed{1}$ Deviner le *candidat limite* ℓ.

- on peut procéder par *analyse-synthèse* : je suppose que la suite est convergente et j'utilise l'**Unicité de la limite** ℓ pour en déduire des conditions nécessaires sur ℓ. L'idéal étant d'arriver à un seul candidat limite!
- dans ce contexte, on peut aussi utiliser une suite extraite : si je sais qu'une suite extraite de u est convergente de limite ℓ, alors, ℓ est le seul candidat limite possible.

$\boxed{2}$ Démontrer que $u_n - \ell \to 0$. Pour cela, il s'agit de montrer que $(u_n - \ell$ peut être rendu arbitrairement petit : on effectue des estimations (majoration de la valeur absolue) ou une comparaison.

Pour prouver qu'une suite est divergente, on utilise le plus souvent les suites extraites. Pour conclure que la suite u est divergente il me suffit

- soit d'exhiber une sous-suite divergente de u,
- soit d'exhiber deux sous-suites de u convergeant vers des limites différentes!

■■■ Utiliser les théorèmes d'existence de limite

Vous n'aurez que très rarement besoin de faire une *preuve en* ε (*Cesaro-like*) pour établir la convergence d'une suite. En général, le travail attendu est d'utiliser le théorème adéquat pour établir la convergence d'une suite. Vous trouverez ci-dessous les principaux théorèmes d'existence de limite. Ils ne sont pas rangés dans un ordre spécial : en fonction de la suite à étudier, c'est à vous de choisir la méthode qui marchera le mieux !

Propriétés algébriques des suites convergentes

Les **Théorèmes OPA** s'utilisent lorsque la suite est construite à partir de suites usuelles par opérations algébriques. Ilsprouvent en même temps que la valeur de la limite, la convergence de la suite u (ou la divergence vers $\pm\infty$).
Si vous "tombez" sur une *forme indéterminée*, vous utilisez les résultats de comparaison des suites de référence pour *lever l'indétermination*, ou bien raisonnez par *équivalents* comme nous apprendront à le faire bientôt !

Les théorèmes de comparaison

Les **Théorèmes d'existence de limite par comparaison** permettent de démontrer la convergence et la limite d'une suite u par comparaison de u avec une (ou plusieurs) autre suite dont on connaît déjà le comportement.

Attention ! Il faut bien faire la distinction entre ces théorèmes d'**existence de limite** et les théorèmes de **passage à la limite dans une inégalité** qui ne s'appliquent que lorsque l'existence de s limites en jeu a déjà été prouvée par ailleurs !

Limites monotones

Rappelez-vous que d'après le **Théorème de la Limite Monotone** le comportement des suites monotones est parfaitement connu ! En plus ce sont les seules suites (les suites adjacentes sont des cas particuliers de suites monotones) pour lesquelles la question de la convergence est indépendante de celle du candidat limite.

- Lorsque dans les hypothèses figure une hypothèse de type inégalité (suite majorée, minorée, bornée) et dans les conclusions la convergence de la suite, vous devez chercher la suite monotone !!
- Lorsque dans l'énoncé la question de la convergence précède la question du calcul de lea limite, vous devez chercher la suite monotone !!

Suites adjacentes

Le théorème de convergence des suites adjacentes s'utilise souvent lorsqu'on n'a aucune idée de la limite éventuelle. Cependant, ce n'est pas le seul cas d'application, puisqu'on l'utilise aussi pour étudier les suites récurrentes.

Suites récurrentes, suites implicites

Les méthodes pour étudier ces suites sera exposée dans le **Chapitre 18**.